6.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Wissen

- Eine Gleichung, in der die Variablen nur linear (hoch 1, die 1 wird aber nicht geschrieben) vorkommen, heißt lineare Gleichung.
  (Zahlen und Parameter dürfen beliebige Hochzahlen haben.)
- Sind mehrere lineare Gleichungen gegeben, so spricht man von einem linearen Gleichungssystem (LGS).

Die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der vorkommenden Variablen muss nicht gleich groß sein. Für den Lösungsweg und die Lösungsmenge sind diese beiden Zahlen aber von entscheidender Bedeutung. Hat ein LGS n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ (meist gilt $n \le 3$), so ist jedes n-Tupel $(r_1 | r_2 | \dots | r_n)$ mit den reellen Zahlen r_i eine Lösung des Systems, wenn beim Ersetzen der Variablen x_i durch die entsprechenden Zahlen r_i **jede** Gleichung des Systems erfüllt ist. Es gibt drei Verfahren zur Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bzw. drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

- **Einsetzverfahren:** Eine Variable aus einer Gleichung wird berechnet und in die anderen Gleichungen eingesetzt.
- **Gleichsetzungsverfahren:** Zwei nach denselben Variablen freigestellte Gleichungen werden so „gleichgesetzt“, dass diese Variable wegfällt.
- **Additions- (oder Subtraktions-)verfahren:** Die einzelnen Gleichungen werden so multipliziert, dass bei der Addition (Subtraktion) zweier Gleichungen eine Variable entfällt.

Mit jedem der drei Verfahren kann jedes LGS gelöst werden. Aber es ist ungleich besser, Sie können eines der Verfahren (am sinnvollsten das Additionsverfahren) richtig, als alle nur oberflächlich.

GAUSS beschrieb ein Verfahren zur Berechnung von Lösungen eines LGS, das eigentlich eine sture Benutzung des Additionsverfahrens darstellt. Dieses **GAUSS’sche Eliminationsverfahren** (GAUSS’scher Algorithmus) gewinnt in heutiger Zeit aufgrund der Rechner immer mehr an Bedeutung. Der große Vorteil dieses Verfahrens ist, dass insbesondere die (immer unbequemen) Sonderfälle (keine Lösung oder unendlich viele Lösungen) sofort erkannt werden.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855)

Der GTR ist zur Lösung des LGS hervorragend geeignet. Sofern Sie ihn zur Verfügung haben, setzen Sie ihn natürlich immer ein. Sie müssen allerdings bei den Sonderfällen „keine Lösung“ bzw. „unendlich viele Lösungen“ die Anzeige auf dem Display richtig deuten können. Das folgende Beispiel sollten Sie mit und ohne Rechner nachvollziehen:

Setzen Sie den GTR ein, wenn Sie ihn nutzen dürfen!
Ein Beispiel finden Sie auf → Seite 118.

Beispiel

① $3x_1 + x_2 + x_3 = 4$	für $t = 2,\ r = -2$ eine Lösung: $(1 \mid -1 \mid 2)$
② $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$	für $t = -4,\ r = 14$ keine Lösung
③ $-2x_1 + 4x_2 + t x_3 = r$	für $t = -4,\ r = -14$ unendlich viele Lösungen